

## La teoria di Einstein-Cartan

Relatore: Francesco Becattini - francesco.becattini@unifi.it

Candidato: Lapo Faggi

L'obiettivo di questo lavoro è essenzialmente quello di cercare di estendere i principi geometrici della relatività generale al mondo della micro-fisica, includendo in una teoria estesa della gravitazione anche il concetto di *spin*. Infatti, anche se la relatività generale standard è a tutti gli effetti la teoria maggiormente accettata ai giorni nostri per una descrizione geometrica della gravitazione, sembra mancare qualcosa.

Nel contesto di tale teoria la materia è rappresentata esclusivamente dal tensore energia-impulso il quale, in poche parole, fornisce una descrizione per la distribuzione di massa/energia-impulso presente nello spazio-tempo: in questa teoria tali quantità sono quindi sufficienti per definire le proprietà di un qualsiasi corpo macroscopico.

Viceversa, se consideriamo adesso il mondo microscopico, troviamo che la materia è formata da particelle elementari, che seguono le leggi della relatività speciale e della meccanica quantistica. Ogni particella non è caratterizzata dalla sola massa ma anche dal suo spin, espresso in unità di  $\hbar$ . Massa e spin, a livello microscopico, sono quindi due concetti indipendenti; così analogamente troviamo che, in una teoria di campo classica, sono definiti il tensore energia-impulso ed il tensore di spin canonici, concettualmente ben distinti tra loro. Il primo è infatti direttamente collegato al concetto di invarianza rispetto alla parte traslazionale del gruppo di Poincaré mentre il secondo all'invarianza rispetto alla parte rotazionale di tale gruppo di trasformazioni. Come mostrato in questo lavoro è sempre possibile, dal punto di vista di una teoria di campo, annullare il tensore di spin (e lavorare con un tensore energia-impulso simmetrico). Comunque sia il concetto di tensore di spin è, per quanto visto, sicuramente indipendente da quello del tensore energia-impulso; sembra quindi appropriato cercare di includere tale nozione ad una teoria estesa della gravità che si proponga di descrivere anche lo spin del sistema fisico in esame, aspetto della natura escluso a priori nel contesto della relatività generale standard.

Quale strada potremmo quindi seguire per comprendere nella teoria qui esposta anche il momento angolare intrinseco di un corpo? In analogia al fatto che in relatività generale la massa (intendo con tale termine sempre il tensore energia-impulso) sia accoppiata alla curvatura dello spazio-tempo attraverso la nota equazione di Einstein, possiamo pensare che, in una teoria estesa della gravitazione, anche lo spin debba essere collegato a qualche proprietà geometrica dello spazio-tempo, in accordo con lo spirito di una teoria geometrica della gravità. Ciò è effettivamente realizzato nell'ambito della teoria di Einstein-Cartan, esposta in questo lavoro. La nuova proprietà geometrica presa in esame è la *torsione*  $\Theta_{\mu\nu}{}^\lambda$  ovvero la parte antisimmetrica della connessione definita sullo spazio-tempo, pensato come una varietà differenziabile. L'introduzione della torsione rappresenta una semplice e naturale modifica della relatività generale; l'esistenza di una relazione tra torsione e spin fornirà, una volta ricavate le equazioni di campo della teoria, una giustificazione fisica per aver introdotto tale concetto, in quanto saremo arrivati ad una teoria che fornisce una descrizione geometrica completa della materia.

Nella prima parte di questo lavoro, incentrata sull'aspetto più geometrico della teoria, viene esposto il concetto di torsione e ne vengono mostrate alcune prime conseguenze. Segue un breve capitolo sul principio di equivalenza: si mostra come in un sistema di riferimento anolonomo sia sempre possibile annullare, anche in presenza di torsione, i coefficienti della connessione. Il capitolo successivo riguarda l'aspetto dinamico della teoria; vengono così introdotti il tensore energia-impulso ed il tensore di spin canonici e le corrispettive definizioni "dinamiche". Vedremo come sarà possibile estendere le definizioni canoniche da uno spazio-tempo piatto ad uno curvo per permettere così, nel contesto della teoria di Einstein-Cartan, una identificazione del tensore di spin dinamico con quello canonico e di un'opportuna combinazione del tensore energia-impulso dinamico e del tensore di spin dinamico con il tensore energia-impulso canonico. Viene poi illustrato come ricavare le equazioni di campo della teoria seguendo un approccio di tipo variazionale. La prima equazione di campo è la naturale generalizzazione, al caso di torsione non nulla, dell'equazione di Einstein. La seconda equazione di campo è invece una relazione algebrica che lega spin e torsione: il fatto che si abbia a che fare proprio con una relazione di tipo algebrico significa che la torsione non si propaga nel vuoto; è presente torsione solo in quei punti dove è presente anche materia dotata di spin. Le due equazioni di campo sono poi riscritte nella forma di un'unica equazione di campo "combinata"; attraverso quest'ultima viene esplicitamente mostrato, nell'ultimo capitolo, come gli effetti dovuti allo spin siano da considerarsi come una correzione alla relatività generale standard e come si possano quasi sempre trascurare. Nell'ultimo capitolo viene inoltre mostrato, nonostante quanto appena affermato, come la teoria di Einstein-Cartan possa portare anche a risultati nettamente differenti rispetto alle predizioni della relatività generale, come per esempio in ambito cosmologico. Nella parte conclusiva dell'elaborato vengono infine riportati, senza nessuna pretesa di completezza, alcuni esperimenti ed alcuni possibili approcci sperimentali seguiti negli ultimi anni, tesi a rilevare una eventuale torsione dello spazio-tempo.