

Candidato: Flavio Del Santo (delsantoflavio@gmail.com)
Relatore: Stefano Lepri (stefano.lepri@isc.cnr.it)
Correlatore: Roberto Livi (livi@fi.infn.it)

CAMMINI DI LÉVY E STRATEGIE DI RICERCA ALEATORIA

I fenomeni di trasporto e diffusione di particelle sono centrali in molti ambiti della fisica e sono oggetto di studio della meccanica statistica dei sistemi fuori dall'equilibrio. Il presente lavoro di tesi riguarda i processi di diffusione descritti da cammini aleatori (*random walks*) e dalle loro generalizzazioni, i cosiddetti *voli e cammini di Lévy*. Nella prima parte della tesi si affrontano i concetti di diffusione ordinaria e anomala e si descrivono matematicamente alcune loro proprietà. La seconda parte riguarda una applicazione in un contesto interdisciplinare: l'ottimizzazione delle strategie di moto aleatorio degli animali durante la ricerca del cibo nel loro ambiente (*optimal foraging problem*).

La traiettoria di un oggetto fisico (*camminatore*) che si muova di random walk è una successione di singoli passi, aventi direzione casuale, e la cui lunghezza ℓ è una variabile aleatoria distribuita secondo una certa funzione densità di probabilità $p(\ell)$. Abbiamo innanzitutto richiamato che in un *simple random walk*, ovvero sotto le ipotesi che ciascun passo sia indipendente dai precedenti (*ipotesi markoviana*), ciascuno di essi venga compiuto in un tempo costante, e che la distribuzione di probabilità che li descrive abbia momento secondo finito, vale il *teorema del limite centrale* e il moto descritto è di tipo *browniano*, ovvero diffusivo classico. Introducendo il *continuous time random walk*, permettendo cioè al camminatore di sostare tra due passi successivi per un certo periodo di tempo (scelto in accordo con una opportuna distribuzione di probabilità) è possibile descrivere fenomeni di diffusione anomala. Abbiamo quindi operato una distinzione tra processi superdiffusivi, in cui cioè lo spostamento quadratico medio cresce più che linearmente col tempo, e subdiffusivi, ovvero in cui lo spostamento quadratico medio è proporzionale ad una potenza del tempo inferiore a quella lineare. Abbiamo poi introdotto i processi di *Lévy*, caratterizzati da distribuzioni che presentano code (grandi valori di ℓ) che decadono con una legge di potenza del tipo $p(\ell) \sim \ell^{-(1+\alpha)}$, dove α è detto indice di Lévy. Per $0 < \alpha \leq 2$ la varianza diverge e non sono quindi più soddisfatte le ipotesi del teorema del limite centrale. Tra questi processi è possibile distinguere tra voli e cammini di Lévy: entrambi i modelli danno luogo a un moto superdiffusivo, ma nel secondo caso si impone che la velocità del camminatore sia finita.

Nella seconda parte si analizza una applicazione di tali concetti in ecologia, discutendo un modello di *foraging* proposto nel 1999 da Viswanathan *et al.* in un articolo sulla rivista *Nature*. Il modello esaminato descrive il movimento di un individuo come un cammino aleatorio con distribuzione dei passi di tipo Lévy. Il moto è finalizzato alla ricerca di risorse (bersagli), che si assumono essere distribuite in modo random nell'ambiente. Alcuni semplici argomenti analitici mostrano che tale strategia di ricerca è in grado di massimizzare l'*efficienza*, definita come il rapporto tra il numero di bersagli visitati e il cammino percorso, per determinati valori dell'indice di Lévy. Più precisamente, per bassa densità di bersagli, l'efficienza è massima per $\alpha \rightarrow 0$, nel caso in cui i bersagli vengano distrutti in seguito al passaggio e per $\alpha \simeq 1$ nello scenario di bersagli più volte visitabili. Infine, si riportano alcuni dati sperimentali sul moto dei daini (*Dama dama*) che avvalorano le ipotesi del modello.