



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Tesi di Laurea Triennale in Fisica e Astrofisica

Instabilità di Turing su supporto continuo e discreto

Sessione di Laurea: Settembre 2015

Candidato: Riccardo Muolo (riccardo.muolo@stud.unifi.it)
Relatore: Professor Duccio Fanelli (duccio.fanelli@unifi.it)

Abstract

Nel 1952 il matematico britannico Alan Turing discusse il processo di instabilità responsabile per la formazione spontanea di motivi stazionari in modelli di reazione e diffusione, sistemi spazialmente estesi i cui costituenti elementari possono interagire localmente e diffondere nel dominio nel quale sono confinati. Una perturbazione non omogenea di un punto fisso omogeneo e stabile può svilupparsi nel tempo, guidando il sistema verso una nuova configurazione stazionaria, modulata spazialmente. All'origine del fenomeno risiede un meccanismo di interazione di tipo attivatore-inibitore fra specie coinvolte. Il concetto di instabilità di Turing, come comunemente si è soliti indicare il processo, trova applicazione in vari ambiti disciplinari, dalla morfogenesi, campo per il quale è stato originariamente concepito, alla biologia delle popolazioni, passando per la chimica delle reazioni oscillanti.

Nel corso di questo lavoro di tesi abbiamo rivisitato la teoria dell'instabilità di Turing, derivando le condizioni che sottendono alla formazione spontanea di pattern in sistemi di reazione-diffusione a due specie, definiti su supporto continuo o grafo complesso. La tesi si struttura in tre capitoli. Nel primo capitolo abbiamo introdotto alcuni strumenti di riferimento per la caratterizzazione dei sistemi dinamici spaziali, assumendo di fatto che la concentrazione media dei costituenti dipenda solo dal tempo. Nel secondo capitolo ci siamo invece interessati ai sistemi spazialmente estesi, combinando opportunamente regole di reazione locali a termini di trasporto. Abbiamo quindi discusso sinteticamente la matematica dell'instabilità di Turing, ottenendo le condizioni analitiche che ne determinano l'insorgenza. Per fornire una prova diretta del processo di instabilità alla Turing abbiamo studiato analiticamente e numericamente il modello del Brusselatore, mostrando in particolare alcuni fra i vari tipi di patterns che si ottengono nel regime non lineare dell'evoluzione. Nel terzo e ultimo capitolo abbiamo discusso il concetto di instabilità di Turing su grafo, mostrando come sia possibile procedere in analogia formale con il caso continuo, a patto di sviluppare la perturbazione imposta su una base formata dagli autovettori dell'operatore laplaciano. La relazione di dispersione che controlla l'insorgenza dell'instabilità è questa volta definita su un supporto discreto e finito, formato dall'insieme degli autovalori del suddetto operatore. I pattern che si generano come conseguenza dell'instabilità risultano in una segregazione fra nodi ricchi/poveri in attivatore/inibitore, come abbiamo potuto mostrare con riferimento al caso del Brusselatore.