

Fluidodinamica dei sistemi frattali

In questa tesi analizziamo il comportamento di un sistema materiale fluido vincolato ad occupare un sottoinsieme dello spazio di dimensione non intera, detto *frattale*. Si tratta di un modello applicabile a molti casi in Natura, in particolare quando si conduca un'analisi del fluido attraverso un *dominio poroso* o quando si vada a considerare una condizione di turbolenza in cui le grandezze locali caratteristiche del fluido (velocità, densità...) sono funzioni analiticamente irregolari.

Il fatto che un dominio frattale si estenda nello spazio tridimensionale, senza però occuparlo completamente, e che presenti caratteristiche collettive che lo rendono qualcosa di più di un semplice insieme di punti, lo candidano ad essere usato per rappresentare una condizione intermedia fra la materia discreta e il suo limite continuo.

Il motivo per cui i sistemi continui di cui discuteremo debbano occupare soltanto un sottoinsieme frattale dello spazio *non* è oggetto di questa tesi: si tratta di un effetto delle forze agenti in essi ad una scala intermedia tra quella microscopica e quella macroscopica che però non modelleremo. Il fatto che un corpo sia D dimensionale anziché saturare lo spazio, è quindi un'assunzione di partenza.

Da quando furono introdotti per la prima volta da Benoit Mandelbrot (Varsavia 1924-Cambridge 2004), i frattali sono stati alla base non soltanto di un intenso studio matematico, ma anche di applicazioni in molti campi della fisica come la meccanica statistica, la teoria della diffusione anomala e l'elettrodinamica.

Negli ultimi decenni sono state elaborate teorie basate sul calcolo frattale di Mandelbrot sui più disparati fenomeni come la diffusione di epidemie, gli intervalli tra le scosse di terremoto e la volatilità degli indici finanziari. Sono questi esempi in cui un sistema è fatto di molti sottosistemi collettivamente accoppiati, ma il cui comportamento individuale produce fluttuazioni non trascurabili.

Da qui il mio interesse nello studio dei frattali e delle loro applicazioni: in particolare, in questa tesi, mi sono concentrato su una applicazione al campo della fluidodinamica.

Nella prima parte della tesi introdurremo il metodo del mass counting e daremo una definizione delle grandezze fondamentali atte a descrivere oggetti frattali omogenei.

Successivamente illustreremo i concetti di base del calcolo frazionario con particolare attenzione allo studio dell'operatore di derivata e di integrale di ordine non intero. Una volta chiarite queste definizioni, proponiamo la riformulazione (e generalizzazione) di Vasily E. Tarasov delle equazioni della *fluidodinamica*.

In particolare analizzeremo le equazioni del bilancio e di Navier-Stokes per un fluido che occupi un dominio frattale che non riempie completamente lo spazio.

Infine proporremo una applicazione del modello descritto: il caso di un'onda meccanica che si propaghi in un mezzo frattale omogeneo, evidenziando la differenza dal caso in cui si muova in uno mezzo continuo.