

Test d'ingresso per il corso di Meccanica Quantistica.

1. Numeri complessi.

1.1 - Scrivere in forma esponenziale e in forma trigonometrica il numero complesso

$$z = 3 - 7i$$
$$\sqrt{58} e^{-i \arctan\left(\frac{7}{3}\right)} \quad (1)$$

1.2 - Calcolare

$$\frac{|-3 + 2i|^2}{13} \quad (2)$$

1.3 - Calcolare

$$\frac{\left| \frac{2 - 5i}{3 - 2i} \right|}{\frac{1}{13} \sqrt{377}}$$
$$(13) (29) \quad (3)$$

1.4 - Calcolare

$$\Im(\sin(i \omega t)^2 \cos(i \omega t)) \quad (4)$$

1.5 - Calcolare

$$\Re(\sin(i \omega t)^3 \cos(i \omega t)^3) \quad (5)$$

1.6 - Calcolare

$$\Re(\sin(1 + 2i)) \quad (6)$$

1.7 - Calcolare

$$\Im(\cos(3 + i)) \quad (7)$$

1.8 - Calcolare

$$\Re(\sin(\pi + 2i)) \quad (8)$$

1.9 - Calcolare

$$\Im\left(\sin\left(\frac{1}{2} \pi + i\right)\right) \quad (9)$$

1.10 - Calcolare

$$|e^{\omega(-bi+a)}|, \omega, a, b, \text{ reali} \quad (10)$$

2. Serie di potenze

2.1 - Sommare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n} \rho^{2n}}{(2n)!} \quad (11)$$

2.2 - Sommare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1} \rho^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (12)$$

2.3 - Sommare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n} \rho^{2n}}{n!} \quad (13)$$

2.4 - Dire qual è il raggio di convergenza e sommare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (14)$$

2.5 - Calcolare la somma finita

$$\sum_{n=18}^{62} x^n \quad (15)$$

3. Matrici e sistemi lineari

3.1 - Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

3.2 - Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.3 - Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.4 - Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

3.5 - Dire se il sistema lineare ammette soluzioni non nulle e, in caso affermativo, quante.

$$x + z = 0$$

$$2x + y - z = 0$$

$$y + z = 0 \quad (20)$$

3.6 - Dire se il sistema lineare ammette soluzioni non nulle e, in caso affermativo, quante.

$$x + z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

$$y + z = 0 \quad (21)$$

3.7 - Dire se il sistema lineare ammette soluzioni non nulle e, in caso affermativo, quante.

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$2x - 4y + 6z = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z = 0 \quad (22)$$

4. Equazioni differenziali lineari

4.1 - Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \kappa^2 \phi(x) = 0, \kappa \text{ reale} \quad (23)$$

4.2 - Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) - \kappa^2 \phi(x) = 0, \kappa \text{ reale} \quad (24)$$

4.3 - Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare con la condizione specificata

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \kappa^2 \phi(x) = 0, \kappa \text{ reale}$$

$$\phi(-a) = 0 \quad (25)$$

4.4 - Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare con la condizione specificata

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) - \kappa^2 \phi(x) = 0, \kappa \text{ reale}$$

$$\phi(\infty) = 0 \quad (26)$$

4.5 - Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare con le condizioni specificate

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \kappa^2 \phi(x) = 0, \kappa \text{ reale}$$

$$\phi(-a) = 0$$

$$\phi(a) = 0 \quad (27)$$

5. Meccanica analitica

5.1 - Dare la definizione del momento angolare L in termini delle variabili canoniche coniugate di posizione e impulso (\mathbf{r}, \mathbf{p}) e calcolare le parentesi di Poisson delle loro componenti

$$\{L_i, L_j\} \quad (28)$$

5.2 - Una sbarra rigida e omogenea di lunghezza a e massa m è vincolata a stare in un piano e a ruotare attorno a un asse fisso perpendicolare al piano e passante per il suo centro di massa. Scrivere la Lagrangiana e la Hamiltoniana di questo sistema.

5.3 - Due palline della stessa massa m sono vincolate a scorrere su una guida rettilinea uniforme e sono connesse tra loro da una molla di costante elastica k . Scrivere la Lagrangiana e la Hamiltoniana di questo sistema. Determinare le equazioni del moto.

5.4 - Data una sfera omogenea di raggio a e massa m , calcolare il campo gravitazionale da essa prodotto alla distanza $a/2$ e $2a$ dal suo centro.

Il numero di studenti che hanno preso parte al test è 52