

Test di autovalutazione per il corso di Meccanica Quantistica

23 Settembre 2015

A. Numeri complessi.

Esercizio 1.

Dire se è vera la seguente uguaglianza e dimostrare la risposta:

$$\frac{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}{(c^2 + d^2)^2} = \left| \frac{a + ib}{c + id} \right|^2$$

Esercizio 2.

Calcolare

$$(a) \quad \left| \frac{e^{ix}}{p + iq} \right|^2, \quad (b) \quad \left| \frac{p + iq}{p - iq} \right|^2, \quad (c) \quad \left| \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{iy} - e^{-iy}} \right|^2, \quad (d) \quad \left| e^{ix} + 1 \right|^2.$$

Esercizio 3.

Nel piano complesso $\mathbb{C}$ dire quali curve sono rappresentate dalle equazioni

$$(a) \quad z^2 + \bar{z}^2 = 2K,$$

$$(b) \quad z^2 - \bar{z}^2 = 2iK,$$

$$(c) \quad |z| = J,$$

$$(d) \quad \arg(z) = L$$

con K, J, L , costanti reali.

B. Algebra lineare.

Esercizio 4.

Invertire le seguenti matrici: (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5.

Dire quando la generica matrice 2×2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile e in questo caso dare la forma esplicita della matrice inversa.

Esercizio 6.

Trovare autovalori e autovettori delle matrici: (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Dire se M ed N sono diagonalizzabili e perchè.

Esercizio 7.

Date le matrici

$$(a) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dire quali sono i loro autovalori con la rispettiva molteplicità.

Esercizio 8.

Trovare gli autovalori con le rispettive molteplicità della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9.

Sia A la matrice dell'Esercizio 8. Indichiamo con A^n il prodotto di n fattori uguali ad A . Dire quali sono gli autovalori con le rispettive molteplicità delle seguenti matrici:

$$(a) \quad A^{17}, \quad (b) \quad A^{42}, \quad (c) \quad A^{63}, \quad (d) \quad A^{96}$$

Esercizio 10.

Sia A la matrice dell'Esercizio 8 ed $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$ la matrice identità in dimensione 3. Dire quali sono gli autovalori con le rispettive molteplicità delle seguenti matrici:

$$(a) \quad A^2 - I_3 \quad (b) \quad 2A^4 - I_3$$

Esercizio 11.

Sia T una generica matrice $n \times n$ ed A una matrice $n \times n$ invertibile. Dire se è vera l'uguaglianza $(A^{-1} T A)^n = A^{-1} T^n A$. In caso affermativo dare una dimostrazione. In caso negativo dare un controesempio.

C. Calcolo ed equazioni differenziali.

Esercizio 12.

Dire se è vera la seguente uguaglianza e dimostrare la risposta:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}\right) f(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r\right) f(r).$$

Esercizio 13.

Usando lo sviluppo della funzione esponenziale in serie di Taylor provare che $e^{x+y} = e^x e^y$

Esercizio 14.

Sapendo che per $a > 0$ abbiamo $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calcolare i seguenti integrali

$$(a) I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n e^{-ax^2} \quad \text{con } n = 2, 4, 9$$

$$(b) J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-a(x-x_0)^2}$$

$$(c) K = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-a(x-x_0)^2} e^{-a(x-x_1)^2}$$

Esercizio 15.

(a) Dire se il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x''(t) = 2x(t) - y(t) \\ y''(t) = 2y(t) - x(t) \end{cases}$$

ammette soluzioni periodiche. In caso affermativo dire quante e quali sono le frequenze diverse e scrivere la forma esplicita delle corrispondenti soluzioni. Sempre in caso affermativo dire se la soluzione più generale periodica.

(b) Rispondere alle stesse domande del punto (a) anche per il sistema

$$\begin{cases} x''(t) = y(t) - 2x(t) \\ y''(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Esercizio 16.

Nell'intervallo $0 \leq x \leq a$ (con $0 < a$) è definita l'equazione differenziale

$$y''(x) + E y(x) = 0$$

con le condizioni $y(0) = y(a) = 0$ e dove E è un numero reale. Dire se $y(x) = 0$ è una soluzione del problema. Dire se possono esistere soluzioni diverse dalla funzione nulla. In caso affermativo dire quando ciò è possibile.

D. Meccanica analitica.

Esercizio 17.

Nel contesto della meccanica Hamiltoniana, il momento angolare di una particella di massa m è definito dal vettore

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \equiv (L_1, L_2, L_3)$$

dove $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ il vettore delle coordinate cartesiane della particella e $\vec{p} \equiv (p_1, p_2, p_3)$ l'impulso canonico coniugato.

- (a) Per indici generici i, j calcolare le parentesi di Poisson $\{L_i, x_j\}$.
- (b) Per indici generici i, j calcolare le parentesi di Poisson $\{L_i, p_j\}$.
- (c) Per indici generici i, j calcolare le parentesi di Poisson $\{L_i, L_j\}$.

Esercizio 18.

Sia $H(\vec{p}, \vec{x}) = \vec{p}^2/2m + V(\vec{x})$ è la funzione Hamiltoniana di una particella di massa m nel potenziale $V(\vec{x})$ ed $\vec{L}$ il suo momento angolare definito nell'Esercizio 17. Spiegare nel minimo numero di parole cos'è una costante del moto e dire perchè se $\{H, \vec{L}\} = 0$ allora $\vec{L}$ è una costante del moto. Dire quale deve essere la forma dell'energia potenziale $V(\vec{x})$ perchè ciò accada.

Esercizio 19.

Sempre nel contesto della meccanica Hamiltoniana e per un sistema in una sola dimensione con x e p variabili canoniche coniugate,

- (a) calcolare le parentesi di Poisson $\{p^2 + x^2, p \pm ix\}$.
- (b) Calcolare la parentesi di Poisson $\{p^2 + x^2, x p^2 x\}$.

Esercizio 20.

Con le definizioni dell'Esercizio 19,

- (a) calcolare la parentesi di Poisson $\{x, f(p)\}$,
- (b) calcolare la parentesi di Poisson $\{p, g(x)\}$,

essendo $f(p)$ una funzione derivabile di p e $g(x)$ una funzione derivabile di x .

* * *